DM : Les applications de Schwarz-Christoffel

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Dans tout ce qui suit, on note $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann et $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Une fonction f définie au voisinage de ∞ est dite holomorphe (resp. méromorphe) au voisinage de ∞ si $w \mapsto f(1/w)$ est holomorphe (resp. méromorphe) au voisinage de 0. On note $\overline{\mathbb{H}}$ l'adhérence de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, c'est-à-dire $\mathbb{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.
On rappelle quelques résultats sur les homographies (cf. TD2 et sa correction). Pour a, b, c, d tels que $ad - bc \neq 0$, la fonction

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$$

avec $f(\infty) = a/c$, définit une fonction méromorphe injective sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ avec un unique pôle d'ordre 1 en $-d/c$. La fonction f s'étend en une fonction, encore notée f, à valeurs dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ donnée par $f(-d/c) = \infty$. Les homographies sont des biholomorphismes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et l'application

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \left(z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \right)$$

de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dans l'ensemble des biholomorphismes de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est un morphisme de groupes, c'est-à-dire que la formule pour la composition des homographies est donnée par le produit de matrices. En particulier, comme une homographie est inchangée par multiplication par $\lambda \neq 0$ des coefficients a, b, c, d, l'inverse de $\frac{az+b}{cz+d}$ est donné par

$$z \mapsto \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Le théorème de l'application conforme prévoit qu'il existe, entre deux ouverts simplement connexes du plan complexe, une application biholomorphe. Le but de ce DM est de construire plus ou moins explicitement une telle application du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ ou du disque unité $\mathbb{D}$ vers un polygone d'angles $\theta_1, ..., \theta_n$. Faire des dessins est encouragé !

1. Soit P un polygone convexe dans $\mathbb{C}$, de sommets $b_1, ..., b_n$. Supposons qu'il existe $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ et une équivalence conforme $F : \mathbb{H} \to \mathrm{int}(P)$ qui s'étend continument en un homéomorphisme $\overline{\mathbb{H}} \to P$ et vérifie $F(a_j) = b_j$. Démontrer qu'il existe $a'_1, ..., a'_{n-1} \in \mathbb{R}$, et une équivalence conforme $G : \mathbb{H} \to \mathrm{int}(P)$ qui s'étend continument au bord et vérifie $G(a'_j) = b_j$ et $G(\infty) = b_n$.
   On introduit des paramètres $\beta_1, ..., \beta_n$ vérifiant $0 < \beta_j < 1$, $\sum_j \beta_j = 2$, l'idée étant qu'en posant $\theta_j = \pi(1 - \beta_j)$ on obtient les angles intérieurs d'un n-gone. On définit, pour $\Im(z) \geqslant 0$:
   $$S(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{(\zeta - a_1)^{\beta_1} \cdots (\zeta - a_{n-1})^{\beta_{n-1}}}$$
   où la branche choisie pour z^β est $e^{\beta\left(\log(z/i) + i\frac{\pi}{2}\right)}$ où log désigne le logarithme usuel sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leqslant 0}$.
2. Démontrer que S est continue sur $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$, holomorphe sur $\mathbb{H}$ et C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{a_1, ..., a_{n-1}\}$.
3. Démontrer que
   $$\lim_{t \to a_k^-} S'(t) = e^{i\pi\beta_k} \lim_{t \to a_k^+} S'(t)$$
4. On pose $b_k := S(a_k)$.
   (a) Démontrer que pour $a_k < t < a_{k+1}$, on a :
   $$\frac{1}{(t - a_1)^{\beta_1} \cdots (t - a_{n-1})^{\beta_{n-1}}} = e^{-i\pi \sum_{a_j > t} \beta_j} \frac{1}{|t - a_1|^{\beta_1} \cdots |t - a_{n-1}|^{\beta_{n-1}}}.$$

(b) En déduire que $b_{k+1} \neq b_k$ et que pour $a_k \leqslant t \leqslant a_{k+1}$

$$S(t) - S(a_k) = e^{-i\pi \sum_{j=k+1}^{n-1} \beta_k} |S(t) - S(a_k)|$$

(c) En déduire que pour $t \in [a_k, a_{k+1}]$, $S(t)$ se situe sur le segment $[b_k, b_{k+1}]$.

5. (a) Démontrer en utilisant le théorème de Cauchy que S admet une limite quand $z \to \infty$, c'est-à-dire que $S(1/w)$ admet une limite quand $w \to 0$, et que S est continue en ce point. On note $b_n = S(\infty)$ cette limite.

(b) En déduire que

$$S(\infty) = \int_0^{+\infty} \frac{d\zeta}{(\zeta - a_1)^{\beta_1} \cdots (\zeta - a_{n-1})^{\beta_{n-1}}} = -\int_{-\infty}^0 \frac{d\zeta}{(\zeta - a_1)^{\beta_1} \cdots (\zeta - a_{n-1})^{\beta_{n-1}}}$$

(c) Démontrer alors que pour $t \geqslant a_{n-1}$, $S(t) - S(a_{n-1})$ est un nombre réel et que pour $t \leqslant a_1$,

$$S(t) - S(\infty) = e^{-i\pi \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k} |S(t) - S(\infty)| = e^{i\pi\beta_n} |S(t) - S(\infty)|.$$

(d) Démontrer que S envoie les segments $[a_{n-1}, \infty]$ et $[\infty, a_1]$ sur $[b_{n-1}, b_n]$ et $[b_n, b_1]$ respectivement.

6. Démontrer que l'angle entre les segments $[b_{k-1}, b_k]$ et $[b_k, b_{k+1}]$ est $\pi(1 - \beta_k)$ (où les indices sont compris modulo n).

7. En déduire que l'image de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ par S est le bord du polygone de sommets $b_1, ..., b_n$.

8. On veut montrer que S est injective sur le bord.

(a) Démontrer que S' ne s'annule sur aucun des segments $]a_k, a_{k+1}[$ et en déduire que S y est injective.

(b) Démontrer en exploitant les angles entre les segments que $[b_j, b_{j+1}] \cap [b_k, b_{k+1}]$ est vide sauf dans les cas évidents, auquel cas leur intersection est réduite à un point. En déduire que S est injective de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ vers le bord du polygone de sommets $b_1, ..., b_n$.

9. On démontre à présent que S est injective sur $\overline{\mathbb{H}}$.

(a) Démontrer que si $p \in \mathbb{C}$ n'est pas dans $S(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$, alors

$$\int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})} \frac{S'(z)}{S(z) - p} dz = \int_{S(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))} \frac{dw}{w - p}$$

vaut $2i\pi$ si p est dans l'intérieur de $S(\overline{\mathbb{H}})$ et 0 sinon.

(b) Déduire du principe de l'argument que S est injective sur $\mathbb{H}$.

(c) Démontrer que $S(\mathbb{H}) \cap S(\mathbb{P}^1(\mathbb{R})) = \emptyset$ et conclure.
Indication : On pourra exploiter le fait que S est une application ouverte de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{C}$.

10. On considère $h : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ donnée par

$$h(z) = i\frac{1+z}{1-z}.$$

C'est un biholomorphisme de réciproque

$$\ell(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

entre le disque unité $\mathbb{D}$ et $\mathbb{H}$, qui envoie $\partial\mathbb{D}$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

(a) Vérifier que pour $a \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ et $\zeta \in \mathbb{D}$, on a

$$(h(\zeta) - a)^\beta = (1 - \zeta)^{-\beta} (i - a)^\beta \left(1 - \frac{\zeta}{\ell(a)}\right)^\beta.$$

Indication : on pourra démontrer que le quotient des deux fonctions est constant et calculer la valeur en $\zeta = 0$.

(b) En déduire qu'il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que

$$S(h(z)) = C \int_{-1}^{z} \frac{d\zeta}{\left(1 - \frac{\zeta}{w_1}\right)^{\beta_1} \cdots \left(1 - \frac{\zeta}{w_n}\right)^{\beta_n}}$$

avec $w_j = \ell(a_j)$ et en particulier $w_n = \ell(\infty) = 1$.

On pose, pour $w_1, ..., w_n$ sur le cercle unité et $\beta_1 + ... + \beta_n = 2$, $0 < \beta_j < 1$:

$$T(z) = \int_{0}^{z} \frac{d\zeta}{\left(1 - \frac{\zeta}{w_1}\right)^{\beta_1} \cdots \left(1 - \frac{\zeta}{w_n}\right)^{\beta_n}}.$$

11. Justifier que cette fonction donne une équivalence conforme de $\mathbb{D}$ vers le polygone convexe de sommets $T(w_1), ..., T(w_n)$.
12. Démontrer que si l'on choisit $w_j = \omega^j$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, et $\beta_j = \frac{2}{n}$, on a $T(\omega^j) = T(1)\omega^j$. En déduire que l'image de $\mathbb{D}$ par T est un n-gone régulier dilaté.
13. On considère un triangle P d'angles $(1 - \beta_1)\pi, (1 - \beta_2)\pi, (1 - \beta_3)\pi$. Démontrer que peu importe les paramètres w_1, w_2, w_3, la fonction T associée à ces paramètres est une équivalence conforme entre $\mathbb{D}$ et l'intérieur d'un triangle de la forme $aP + b$.

On peut (mais c'est difficile) démontrer qu'une application conforme $f : \mathbb{H} \to P$, où P est un polygone convexe, est toujours essentiellement de la forme Schwarz-Christoffel (plus précisément de la forme $aS(z) + b$ avec $a, b \in \mathbb{C}$). En général, trouver les bons a_k est un problème très difficile, particulièrement quand $n \geqslant 5$.